

周波数整形 LQG を用いた倒立二輪ロボット (モータ 1 軸) の安定化

- e-nuvo WHELL x dSPACE 実験・研究用ラピッドプロトシステムの開発 -

Stabilization of the Wheeled Inverted Pendulum with Frequency shaped LQG Controller

Development of Rapid Prototype System e-nuvo WHEEL + dSPACE for Experiment & Research

株式会社ゼットエムピー

ZMP INC., e-nuvo@zmp.co.jp

We developed “WHEEL+dSPACE Package” which system can generate C Source Code by itself and control from Logic written by MATLAB/Simulink without any hard coding. In this report, we will introduce this system and its effectiveness, because, using this system, we could check, in comparison with optimal control, its better effectiveness by implementing Frequency Shaped LQG.

Key Words: Robot, Education, Dynamic Mobile Robot, Wheeled Inverted Pendulum, Modern Control, Optimal Control, Frequency shaped LQG Control, Simulation, MATLAB®/Simulink®, Real-Time Workshop, dSPACE, ControlDesk, Real-Time Interface, Real time control, Rapid Prototype

1. はじめに

株式会社ゼットエムピー (<http://www.zmp.co.jp/>) は、組み込みプログラミングの基礎や、制御理論の基礎として「現代制御」に焦点をあてた車輪型の倒立二輪ロボット e-nuvo WHEEL (以下、倒立二輪ロボット) を開発・販売しています。この教材用ロボットは、C 言語によってプログラミングしたファームウェアをマイコンに実装します。これは、A/D 変換、割り込み処理、タイマ、CPU のレジスタといった組み込みプログラミングの基礎が学習できるという反面、プログラミングという煩わしい実装作業が必要になることから、特に制御理論を学習あるいは研究したいユーザからは MATLAB/Simulink から直接制御できないか? という問合せが多数ありました。また、産業界からも MATLAB/Simulink の教育にそのような意見がありました。そこで今回、一切のハードコードを必要とせず、MATLAB/Simulink で記述した制御ロジックから C ソースコードを自動生成して制御するシステム「WHEEL x dSPACE パッケージ」を開発しました。本報告では、このシステムを使って、多少複雑な制御則である周波数整形 LQG を実装し、最適制御に比べ有効性が確認できましたので、その有効性をシステムの紹介と合わせてします。このように、本システムを使うと複雑な制御則でも MATLAB/Simulink で記述することにより比較的容易に実装が可能です。したがって、制御理論の検証用に本パッケージは適していると言え、さらに複雑な制御則の適用も考えられます。

マイコンによる組み込みプログラミングの A/D 変換、割り込み処理、タイマ、CPU のレジスタといった知識は、制御系エンジニアにとっても非常に重要です。e-nuvoWHEEL を使ってマイコンで制御する方法を学習した上で、このような MATLAB/Simulink を用いた開発・実装する便利なツールを使うことをお勧めします。

2. 倒立二輪ロボットの概略と従来の問題点

2.1 倒立二輪ロボットの概略

倒立二輪ロボットの外観写真を Fig.1 に示します。このロボットのアクチュエータは、模型用 DC モータ (マブチモーター株式会社製 RE-280) を使用しています。電気回路にはトルク指示をするための電流フィードバック回路が搭載され、ソフトウェアで電流フィードバックを実施しています。したがって、電流指示 (トルク指示) ができるものとして制御器を設計することができます。



Fig.1 External view of the wheeled inverted pendulum

2.2 倒立二輪ロボットの従来の問題点

“倒立二輪ロボット (モータ 1 軸) の安定化と走行制御” では、最適制御理論によって安定化および走行を実現しました。¹⁾

問題点は、バックラッシュを原因とした振動成分をもフィードバックしてしまい、増幅して発散しないまでもカタカタと音を立てて振動しながら倒立していました。Fig.2 は、今回

開発した WHEEL x dSPACE パッケージを用いて同様の最適制御をしたときの波形です。50.75 秒付近から 52 秒のところでカタカタと振動していることがわかります。

このカタカタとした振動成分を除去するため、周波数整形 LQG を適用することを考えます。

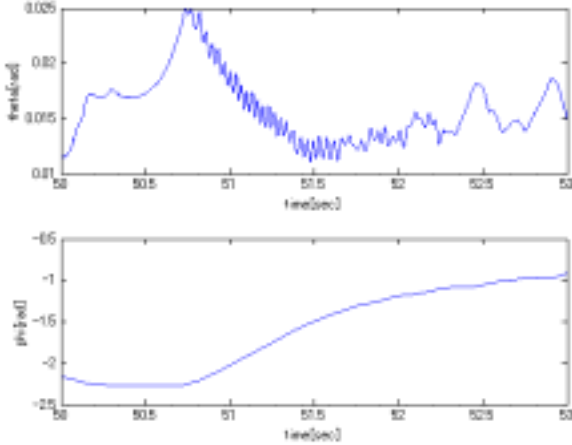


Fig.2 Angle of the body and wheel
(Optimal Control(LQR) : $Q = \text{diag}\{1,15,1,10\}, R = 500$)

3. 倒立二輪ロボットのモデリングと安定化

3.1 倒立二輪ロボットの運動方程式

この倒立二輪ロボットを Fig.3 のようにモデリングします。倒立二輪ロボットのボディの姿勢（傾き）は鉛直方向から時計回りを正としました。タイヤの回転角度は、エンコーダによってボディからの角度として取得できるので、実装する際のソフトウェアのコーディング作業の便宜を考え、ボディからの角度として定義しました。タイヤの回転角度も、同様に時計回りを正としています。このように座標系を定め、Table.1 の記号を用いて倒立二輪ロボットの運動方程式を導出すると式(1)、(2)のようになります。¹⁾

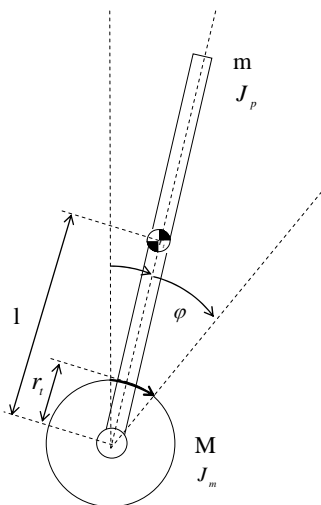


Fig.3 Modeling of the wheeled inverted pendulum

Table.1 Parameters of the wheeled inverted pendulum

Mass of the body	m	[kg]	0.5241
Mass of the cart (Tire, Drive shaft, gear)	M	[kg]	0.071
Moment of inertia of the body	J_p	[Kg·m ²]	2.16E-03
Moment of inertia of the cart	J_t	[Kg·m ²]	8.63E-06
Moment of inertia of the motor rotor	J_m	[Kg·m ²]	1.30E-07
Length between the wheel axle and the gravity center of the body	l	[m]	0.1204
Radius of the wheel	r_t	[m]	0.02485
Friction of the wheel axle	c	[kgm ² /s]	1.00E-04
Torque constant of the motor	K_t	[N·m/A]	2.79E-03
Reduction ratio of the gear	i	[-]	30

$$\begin{aligned} & \{(M+m)r_t^2 + mlr_t \cos \theta + J_t + iJ_m\} \ddot{\theta} \\ & - mlr_t \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2 \\ & + \{(M+m)r_t^2 + J_t + i^2 J_m\} \ddot{\phi} + c\dot{\phi} = au \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \{(M+m)r_t^2 + 2mlr_t \cos \theta + ml^2 + J_p + J_t + J_m\} \ddot{\theta} \\ & - mlr_t \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2 - mgl \sin \theta \\ & + \{(M+m)r_t^2 + mlr_t \cos \theta + J_t + iJ_m\} \ddot{\phi} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 u はモータの電流目標値[A]であり、 a は、 u からタイヤ軸のトルクまでのゲイン[Nm/A]です。また、 \dot{x} は、 $\dot{x} = \frac{d}{dt}x$ であり時間に関する一階微分を、 \ddot{x} は同様に $\ddot{x} = \frac{d^2}{dt^2}x$ を表し、時間に関する二階微分を表すものとします。

3.2 運動方程式の線形化と状態方程式

倒立二輪ロボットが直立姿勢を保つように安定化を施します。安定化が実現できれば、 θ は、0 の近傍の値しかとらないと仮定でき、 $\sin \theta \approx \theta$ 、 $\cos \theta \approx 1$ とみなすことができます。さらに、 $\dot{\theta}$ を微小と仮定して $\dot{\theta}^2 \approx 0$ とおくと、運動方程式(1)(2)を次のように線形化することが可能になります。

$$\begin{aligned} & \{(M+m)r_t^2 + mlr_t + J_t + iJ_m\} \ddot{\theta} \\ & + \{(M+m)r_t^2 + J_t + i^2 J_m\} \ddot{\phi} + c\dot{\phi} = au \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \{(M+m)r_t^2 + 2mlr_t + ml^2 + J_p + J_t + J_m\} \ddot{\theta} \\ & - mgl\theta \\ & + \{(M+m)r_t^2 + mlr_t + J_t + iJ_m\} \ddot{\phi} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、現代制御理論を適用するために状態方程式の表現にします。

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (5)$$

ただし、

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \varphi \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \\ -\alpha^{-1}\gamma & -\alpha^{-1}\beta \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} \\ -\alpha^{-1}\delta \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{11} = (M+m)r_i^2 + mlr_i + J_i + iJ_m$$

$$\alpha_{12} = (M+m)r_i^2 + J_i + i^2J_m$$

$$\alpha_{21} = (M+m)r_i^2 + 2mlr_i + ml^2 + J_p + J_i + J_m$$

$$\alpha_{22} = (M+m)r_i^2 + mlr_i + J_i + iJ_m$$

$$\beta = \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -mgl & 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$$

とおいています。¹⁾

3.3 倒立二輪ロボットの安定化制御(周波数整形 LQG)

周波数整形 LQG を倒立二輪ロボットに適用します。最適制御理論では、重み行列として非不定な対称行列 $Q = Q^T \geq 0$ と正定対称行列 $R = R^T > 0$ に対して、評価関数

$$J = \int_0^{\infty} \{x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)\} dt \quad (6)$$

を最小化する入力 $u(t)$ を求める問題でした。周波数整形 LQG では、重み行列を定数ではなく、周波数に依存した周波数重み関数行列 $Q(j\omega)$, $R(j\omega)$ とします。周波数に依存した重みとすることで、所望の周波数帯域の信号のプライオリティを高くして評価することができるようになります。ある周波数帯域にのみ制御を効かせることが可能になります。極端な例として、ある周波数より高い領域で重みを 0 にすれば、その帯域では信号を評価しないことになります。ここで、 $Q(j\omega)$, $R(j\omega)$ は、 ω^2 の有理多項式からなる行列で、 $Q(j\omega)$ は準正定でランクが q , $R(j\omega)$ は正定でフルランク r とします。

評価関数(6)をパーシバルの公式を用いて周波数領域で表すと

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} E \left[X^*(j\omega) Q(j\omega) X(j\omega) + U^*(j\omega) R(j\omega) U(j\omega) \right] d\omega \quad (7)$$

となります。ここで、 $*$ は複素共役転置を表します。

いま、 $Q(j\omega)$, $R(j\omega)$ は以下のように複素関数とその複素共役転置した関数に因数分解できます。

$$Q(j\omega) = \bar{Q}^*(j\omega) \bar{Q}(j\omega)$$

$$R(j\omega) = \bar{R}^*(j\omega) \bar{R}(j\omega)$$

したがって、式(7)の評価関数は、

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} E \left[X^*(j\omega) \bar{Q}^*(j\omega) \bar{Q}(j\omega) X(j\omega) + U^*(j\omega) \bar{R}^*(j\omega) \bar{R}(j\omega) U(j\omega) \right] d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} E \left[\bar{X}^*(j\omega) \bar{X}(j\omega) + \bar{U}^*(j\omega) \bar{U}(j\omega) \right] d\omega$$

となり、 $\bar{Q}(j\omega)$, $\bar{R}(j\omega)$ をプロババーな有理多項式で与えると次のような状態方程式で表せます。

$$\dot{x}_q(t) = A_q x_q(t) + B_q u(t) \quad (8-a)$$

$$z_q(t) = C_q x_q(t) + D_q u(t)$$

$$\dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r u(t) \quad (8-b)$$

$$z_r(t) = C_r x_r(t) + D_r u(t)$$

結局、評価関数は、

$$J = E \left[\tilde{z}(t)^T \tilde{Q} \tilde{z}(t) + 2\tilde{z}(t)^T \tilde{S} u(t) + u^{T(u)} \tilde{R} u(t) \right]$$

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} D_q^T D_q & D_q^T C_q & 0 \\ C_q^T D_q & C_q^T C_q & 0 \\ 0 & 0 & C_r^T C_r \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_r^T D_r \end{bmatrix}, \quad \tilde{R} = D_r^T D_r$$

となり、次の拡大システムのもとに、評価関数(9)を最小にする最適制御入力を求める問題に帰着されます。

$$\dot{\tilde{z}}(t) = \tilde{A} \tilde{z}(t) + \tilde{B} u(t)$$

$$\tilde{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_q(t) \\ x_r(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ B_q & A_q & 0 \\ 0 & 0 & A_r \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ B_r \end{bmatrix}$$

したがって、最適制御入力は、

$$u(t) = -\tilde{R}^{-1} (\tilde{B}^T \tilde{P} + \tilde{S}) \tilde{z}(t)$$

$$= - \begin{bmatrix} F_b & F_q & F_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_q(t) \\ x_r(t) \end{bmatrix} \quad (10)$$

となり、 \tilde{P} は次のリカッチ方程式の一意正定対称行列です。

$$\tilde{P} (\tilde{A} - \tilde{B} \tilde{R}^{-1} \tilde{S}^T) + (\tilde{A} - \tilde{B} \tilde{R}^{-1} \tilde{S}^T)^T \tilde{P} - \tilde{P} \tilde{B} \tilde{R}^{-1} \tilde{B}^T \tilde{P} + \tilde{Q} - \tilde{S} \tilde{R}^{-1} \tilde{S}^T = 0$$

結局、状態量にフィルタ(8-a)を通した信号と入力にフィルタ(8-b)を通した信号が \tilde{Q} , \tilde{S} , \tilde{R} の重みのもとで最小となる入力を求めていることとなります。²⁾

3.4 周波数整形 LQG の重みの設定

文献 2) では、 $\bar{Q}(j\omega)$, $\bar{R}(j\omega)$ の設定指針として感度関数および相補感度関数との関係から、 $\bar{Q}(j\omega)$ は低周波数領域でゲインの大きなフィルタとし、 $\bar{R}(j\omega)$ は高周波数領域でゲイ

ンの大きなフィルタを設定すべきであると論じられています。制御を利かせたい低周波数領域で $\bar{Q}(j\omega)$ のゲインを大きくすると、低周波数領域の状態量の重みを大きくして評価関数を評価することになります。一方、高周波領域で $\bar{R}(j\omega)$ のゲインを大きくすることは、高周波領域で入力を抑えるような制御器になるので、カタカタとした振動する領域で $\bar{R}(j\omega)$ のゲインを大きくすることによってその領域で入力を抑えることができます。すなわち、振動成分をフィードバックしないようにすることによって、いわゆるハウリングのような効果を低減します。これは、前述したように「入りにフィルタ(8-b)を通した信号」が小さくなるような制御器となることから直感的に理解できます。また、「状態量にフィルタ(8-a)を通した信号」を小さくすることから低周波数領域で状態量を小さくすることができることも直感的に解ります。

具体的には、Fig.2の50.75秒付近から52秒のところボディの角度がカタカタと約25Hzで振動していることから、 $\bar{Q}(j\omega)$ を10Hz以上で小さくなるような重みにしました。また、カタカタと音をたてて揺れており、目視でも振動していることが確認できますが、タイヤの角度にはそのような成分は見当たりません。エンコーダのパルス信号を4週倍していないためか、細かい挙動までセンシングできていないので、タイヤの角度に対する重みは、周波数に依存せず定数としました。入力に対する重み $\bar{R}(j\omega)$ も10Hz以上で小さくなるように設定しました。

$$\bar{Q}(j\omega) = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}(j\omega) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{33}(j\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\bar{R}(j\omega) = \bar{R}(j\omega)$$

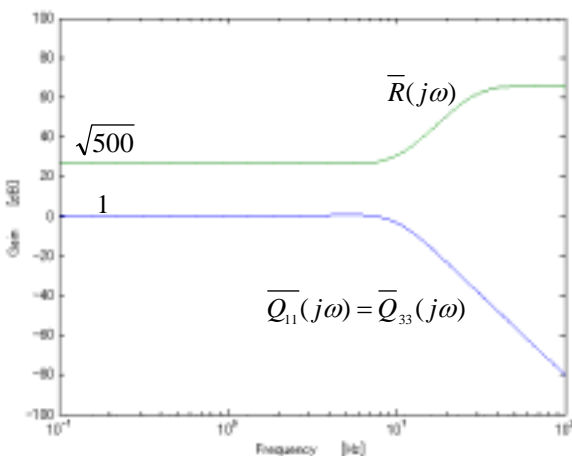


Fig.4 Weighting function of frequency shaped LQG

3.5 倒立二輪ロボットの安定化の実験

実験装置

倒立二輪ロボットの外観写真は Fig.1 に示しました。本来、

倒立二輪ロボット e-nuvoWHEEL は本体に搭載された H8 マイコンで制御されます。今回は、H8 マイコンに実装する前に周波数整形 LQG が有効であるかどうか確認することが目的なので、別のリアルタイム制御ボードに制御器を実装して確認しました。構成は、Fig.5 のようになっています。

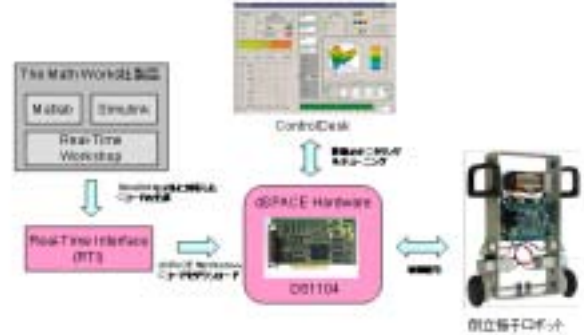


Fig.5 Rapid Prototype System

リアルタイム制御ボードとして、dSPACE 製の DS1104 を採用しています。これは、MATLAB/Simulink で記述した制御ロジックを Real-Time Workshop を用いて C ソースコードを自動生成します。また、DS1104 の A/D 変換器や PWM 生成器などの I/O を制御する Simulink ブロックが dSPACE 社より提供されており、Real-Time Interface が I/O ブロックの C ソースコードを自動生成してくれます。これらのソースコードをコンパイル、リンクしてリアルタイム制御ボードに実装するところまで自動で実施することができます。したがって、ユーザーは一切のハンドコードを必要とせず、設計やシミュレーションに用いた Simulink モデルを使って実装、テストまで可能です。

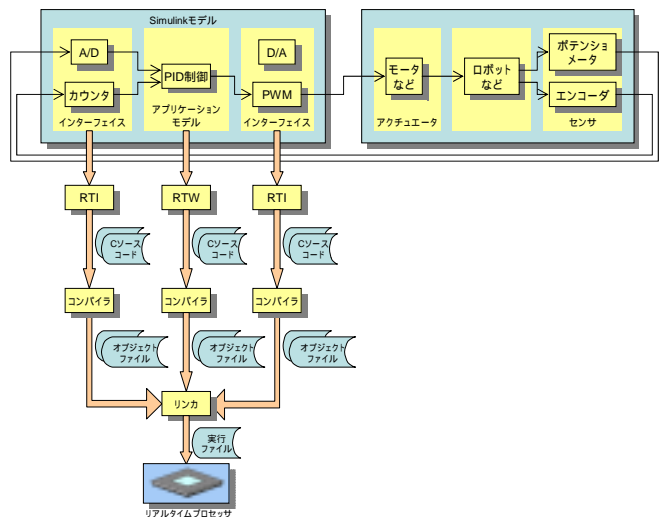
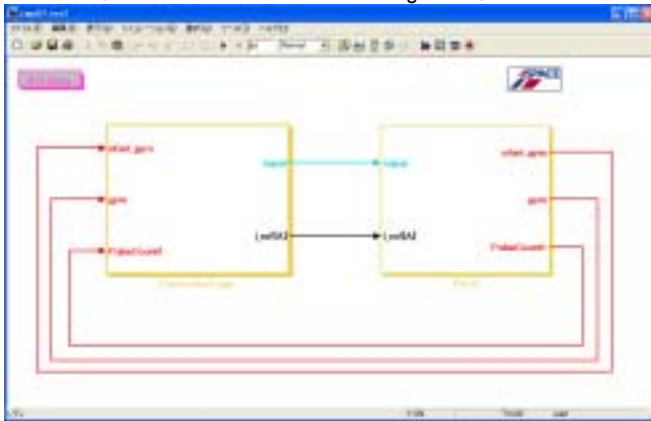


Fig.6 Implementation to Real-Time hardware

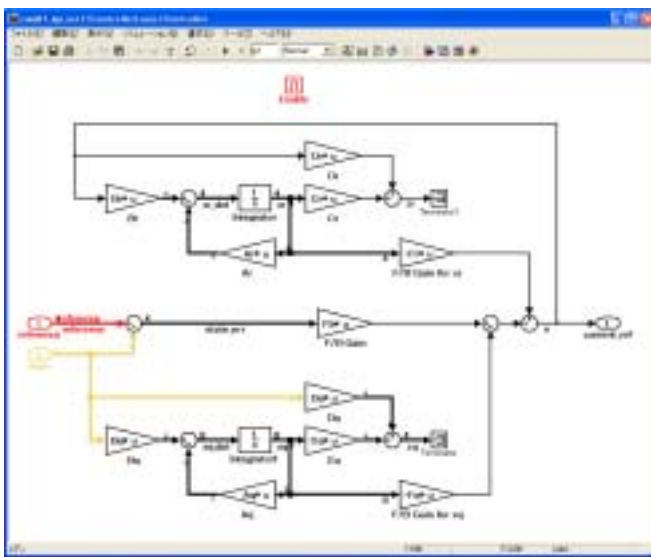
また、dSPACE 社の提供するソフトウェア ControlDesk を使うと、制御ボードによって実際に制御対象を制御している最中にリアルタイムで制御器のゲインなどの定数を変更することが可能です。これによって、チューニングの必要な開発の

場合、かなりの工数削減が可能になります。

実験に使った Simulink モデルを Fig.7 に示します。



(a) Root model



(b) Controller model(Frequency shaped LQG)

Fig.7 Simulink model

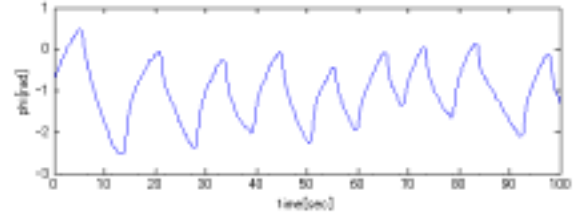
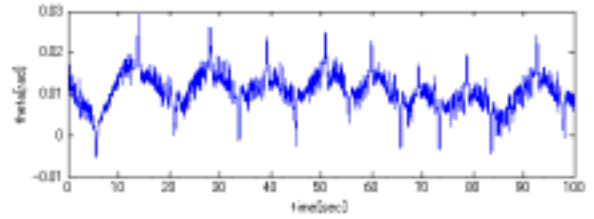
実験結果

最適制御と 3.3 で設計した周波数整形 LQG の 2 つの制御則を dSPACE 製リアルタイム制御ボード DS1104 に実装して実験しました。純粋に制御則の比較となるように最適制御の重みは次のようにしています。

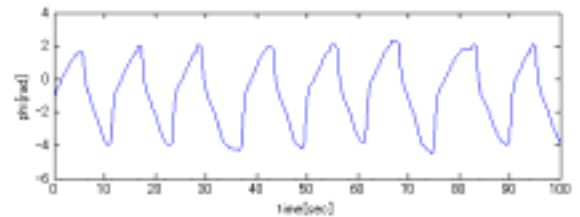
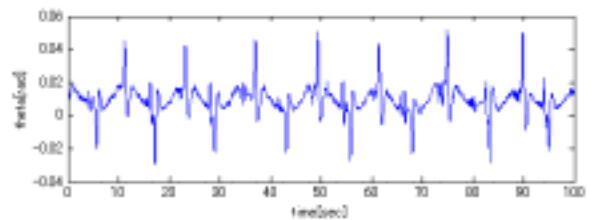
$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$R = 500$$

実験結果の波形を Fig.8 に示します。最適制御(LQR)では、カタカタと音を立てて倒立していたものが、周波数整形 LQG ではカタカタといった音はなく目視で明らかに違いがわかりました。その代わりに、前後方向の動き(タイヤの角度 ϕ)が多少大きくなっています。



(a) Optimal Control LQR



(b) Frequency shaped LQG

Fig.8 Experiment Result

Fig.1 は、Fig.8(a)を拡大したグラフで、前述のようにカタカタとした振動が波形で確認できます。Fig.8(b)の中の Fig.1 に相当する部分が、次に示す Fig.9 です。この波形からも明らかにカタカタとした振動成分が消えていることが確認できます。

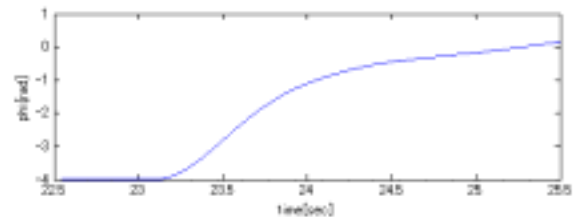
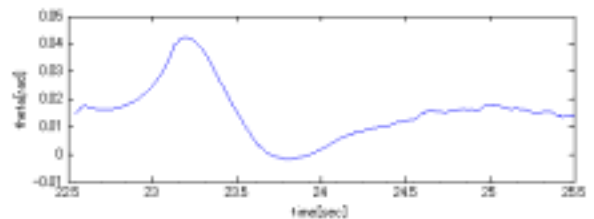
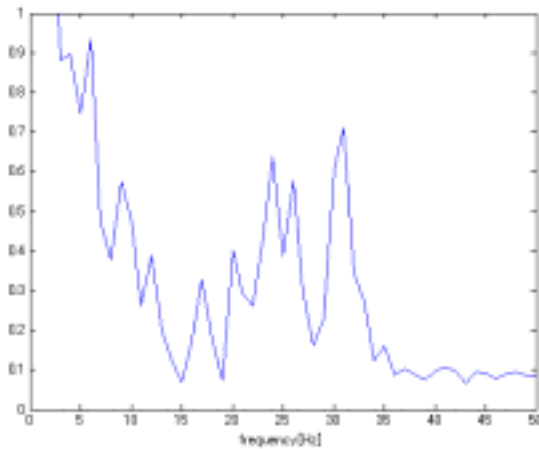
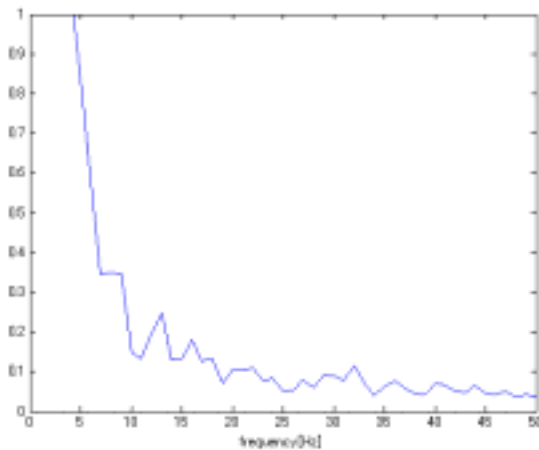


Fig.9 Experiment Result

Fig.1 の 51 秒から 52 秒のところのカタカタと振動している部分とそれに対応する Fig.9 の 23.5 から 24.5 の信号の FFT 変換した値をプロットしたものが、Fig.10 です。約 25Hz で振動していた成分が周波数 LQG では無くなっています。



(a) Optimal Control LQG



(b) Frequency shaped LQG

Fig.10 FFT of Experiment Result

5. まとめと今後の展開

最適制御理論の場合、バックラッシの影響でカタカタと音を立てて振動しながら倒立していました。この振動を抑制するため、周波数整形 LQG を用いて高周波数領域で入力を抑え、カタカタとした振動成分をフィードバックしない制御器を設計しました。最適制御理論と周波数整形 LQG をリアルタイム制御ボードに実装してその有効性を確認しました。カタカタと音を立てて振動していたものが、振動が無くなったのが目で見てわかる程、劇的に振動成分を消すことができました。

本実験で用いた WHEEL x dSPACE パッケージは、一切のハンドコードを必要としないため CPU のレジスタや割り込み処理といった専門的な知識を必要とせず、MATLAB/Simulink で記述した制御ロジックを自動でコンパイル・リンクしてリアルタイム制御ボードに実装することができます。また、制御対象を制御している最中に（制御ボードの稼働中に）リアルタ

イムで制御器のゲインなどの定数を変更することが可能です。よって、このシステムを使った e-nuvoWHEEL のタイヤの角度を制御する PID 制御では、リアルタイムで PID のゲインをチューニングすることができます。したがってこのパッケージは、PID 制御の挙動を体験し波形を考察するような学生実験での使用にも適しています。

この WHEEL x dSPACE パッケージの用途は、前述の PID 制御の学生実験や最適制御の学生実験に使えます（教育用途）。最適制御においては、マイコンで制御する場合と同様に最適制御の重みを変更すると理論とおりロボット挙動が変わり、その動きが目で見ることが出来ます。したがって、重みがどのような役割を持つものなのか体験できるという意味で最適制御を学習するのに適しています。さらに、今回の周波数整形 LQG のような複雑な制御も Simulink によって容易に実装できることから制御理論の検証用として使えます（研究用途）。

今後は、状態を推定するオブザーバ、外乱や斜面の角度を推定するオブザーバ、モータの同定や摩擦の同定といったパラメータ同定問題、ロボット自体をそのまま同定するシステム同定問題などのモデリングに関する学習など様々な学習ができる環境を整えたいと思っています。また、マイコンに実装する C ソースコード（量産用コード）を自動生成するシステムの開発を考えています。研究用としては、H 制御や μ 設計に代表されるロバスト制御やスライディングモードなどの非線形制御、モデル予測制御等の適用も考えられます。

産業界では未だに古典的な PID 制御が 90%以上を占めていると言われております。その理由はいくつかあると思いますが、PID 制御は直感的に解りやすく、制御工学の専門知識がなくとも PID 制御のイメージさえ理解してしまえばなんとなく制御できてしまうことが理由のひとつだと思います（これは利点でもある?!）。対して現代制御などが使い難い理由の一つとして、数学的な知識が必要であり、イメージが湧きにくいという点が挙げられます。e-nuvoWHEEL や WHEEL x dSPACE パッケージで、最適制御や周波数整形 LQG の挙動が実際に体験できます。特に WHEEL x dSPACE パッケージは制御器の実装が比較的容易にできることから様々な制御器を実際に実装して試してみることができます。このように制御を実際に実機で体験してイメージを持つことが制御系エンジニアにとってとても重要だと思います。

6. 謝辞

WHEEL x dSPACE パッケージを開発するにあたり、dSPACE Japan の皆様にご協力をいただきました。ここに御礼申し上げます。

参考文献

- 1) 株式会社ゼットエムピー, “倒立二輪ロボット（モータ 1 軸）の安定化と走行制御”, 2007
- 2) 野波健蔵, 西村秀和, 平田光男, “MATLAB による制御系設計”, 東京電機大学出版局, 1998